

Přímočarý pohyb

Automobil projel délku dráhy 20 m s konstantním zrychlením. První polovinu dráhy projel za dobu 1,5 s, druhou polovinu za dobu 2 s. S jakým zrychlením se automobil pohyboval a jaká byla jeho počáteční rychlost? $[-0,952 \text{ m.s}^{-2}; 7,38 \text{ m.s}^{-1}]$.

Poloha tělesa, které se pohybuje po ose x je dána vztahem $x = 10 \text{ m.s}^{-2}t^2 - 5 \text{ m.s}^{-1}t$.

- Najděte rychlost a zrychlení tělesa.
- Jaká je počáteční rychlost?
- Jaký je význam znaménka minus?
- Najděte maximální vzdálenost vlevo od počátku, do které se těleso dostane.
- Ve kterých dvou časech je $x = 0$?
- Najděte rychlost tělesa v obou těchto časech.
[$20 \text{ m.s}^{-2}t - 5 \text{ m.s}^{-1}$; 20 m.s^{-2} ; -5 m.s^{-1} ; těleso se pohybuje v čase $t = 0$ doleva; $-0,625 \text{ m}$; $0,5 \text{ s}$; 0 ; 5 m.s^{-1} ; -5 m.s^{-1}].

Poloha hmotného bodu při přímočarém pohybu po ose x je dána funkcí $x = 1/6 \text{ m.s}^{-3}t^3 - 2 \text{ m.s}^{-2}t^2 + 8 \text{ m.s}^{-1}t - 7,5 \text{ m}$. Určete:

- Souřadnici x v čase 3 s.
- Rychlost jako funkci času.
- Počáteční rychlost.
- Zrychlení jako funkci času.
- Počáteční zrychlení.
- Čas, ve kterém je zrychlení nulové.
- Čas, ve kterém je rychlost nulová.
- Nakreslete graf závislosti rychlosti a zrychlení na čase.

Rychlost hmotného bodu při jeho pohybu po ose x je dána funkcí $v = 3 \text{ m.s}^{-3}t^2 + 5 \text{ m.s}^{-1}$. a) Určete rychlost v čase 2 s. b) Určete závislost souřadnice na čase, je-li její hodnota v čase $t = 0$ rovna 2 m. c) Určete souřadnici v čase 2 s. d) Určete zrychlení jako funkci času. e) Určete zrychlení v čase 2 s. f) Jakou délku dráhy urazí hmotný bod v intervalu 0 až 3 s? [17 m.s^{-1} ; $x = 1 \text{ m.s}^{-3}t^3 + 5 \text{ m.s}^{-1}t + 2 \text{ m}$; 20 m ; $a = 6 \text{ m.s}^{-3}t$; 12 m.s^{-2} ; 42 m].

Zrychlení tělesa, které se pohybuje v ose x , je dáno vztahem $a = 8 \text{ m.s}^{-2} + 12 \text{ m.s}^{-4}t^2$. V čase $t = 3 \text{ s}$ se nachází těleso 100 m vpravo od počátku a jeho rychlost je 100 m.s^{-1} .

- Najděte vztahy pro rychlost a polohu tělesa v libovolném čase t .
- Jaká je jeho počáteční rychlost?
- Jaká je jeho počáteční poloha?

Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $49,05 \text{ m.s}^{-1}$. Za dobu 2 s bylo ze stejného místa vrženo druhé těleso nahoru se stejnou počáteční rychlostí. Kdy se tělesa srazí a v jaké výšce? [4 s po vyhození druhého tělesa; $117,7 \text{ m}$].

Po hladkém svahu klouže těleso bez tření dolů. Úhel svahu je 30° , délka svahu je 10,2 m. Jakou konečnou rychlostí dorazí těleso na dolní konec, jestliže mělo počáteční rychlost 3 m.s^{-1} ? [$10,44 \text{ m.s}^{-1}$].

Těleso bylo vrženo svisle vzhůru a dopadlo na zem za 4 s. Jakou počáteční rychlostí bylo těleso vrženo a jaké maximální výšky dosáhlo, je-li výška místa vrhu nad zemí 1,5 m? [$19,25 \text{ m.s}^{-1}$; $20,38 \text{ m}$].

Křivočarý pohyb

Poloha těžiště tělesa je dána vektorovou rovnicí

$$\vec{r} = (2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} t + 5 \text{ m})\vec{i} - 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}t^2\vec{j} + \frac{1}{3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}t^3\vec{k}.$$

- Napište parametrické rovnice trajektorie.
- Stanovte polohu tělesa, jeho vzdálenost od počátku a směrové kosiny polohového vektoru pro čas $t = 3 \text{ s}$.
- Určete rychlost v čase $t = 3 \text{ s}$.

Souřadnice hmotného bodu, pohybujícího se v rovině xy závisí na čase podle vztahů $x = A - Bt^2$, $y = -C + Dt^2$, kde $A = 9 \text{ m}$, $B = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $C = 12 \text{ m}$, $D = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Určete:

- Polohový vektor.
- Rychlost a zrychlení obecně.
- Rychlost a zrychlení v čase 5 s .
- Rovnici trajektorie.
- O jaký pohyb jde?
- Jak dlouho potrvá pohyb mezi souřadnicovými osami?

Hmotný bod se pohybuje po šroubovici dané parametrickými rovnicemi pro souřadnice: $x = 2 \text{ m} \cos 2 \pi \text{ s}^{-1}t$, $y = 2 \text{ m} \sin 2 \pi \text{ s}^{-1}t$, $z = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}t$. Určete:

- Vektor rychlosti, jeho velikost a směrové kosiny v čase $t = 1 \text{ s}$.
- Vektor zrychlení, jeho velikost a směrové kosiny v čase $t = 1 \text{ s}$.
- Tečné a normálové zrychlení a poloměr křivosti trajektorie v bodě, v němž se nachází hmotný bod v čase $t = 1 \text{ s}$.

Těleso rotuje kolem pevné osy úhlovou rychlostí $\omega = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} + 2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}t$. Pro bod tělesa ve vzdálenosti $r = 0,2 \text{ m}$ od osy určete:

- Počáteční úhlovou rychlost.
- Úhlové zrychlení.
- Úhel otočení v intervalu $t \in \langle 0, 5 \text{ s} \rangle$.
- Obvodovou rychlost v čase 5 s .
- Tečné zrychlení v čase 5 s .
- Normálové zrychlení v čase 5 s .

Vlak jede po kruhovém oblouku, jehož poloměr křivosti je 400 m a má tečné zrychlení $0,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Vypočítejte jeho normálové a celkové zrychlení v okamžiku, kdy se jeho rychlost rovná $10 \text{ m}\cdot\text{s}$.

Setrvačnick, jehož úhlové zrychlení je konstantní a rovno $2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$, se otočil za dobu 5 s o úhel 75 rad . Jak dlouho byl již v pohybu před začátkem uvedeného časového intervalu, jestliže se rozběhl z klidu?

Těleso se rozbíhá z klidu do otáčivého pohybu se stálým úhlovým zrychlením $2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$. Kolik otáček vykoná v časovém intervalu $\langle 0, 15 \text{ s} \rangle$? Jaké je tečné a normálové zrychlení a okamžitá rychlost bodu na obvodu tělesa, vzdáleného $0,2 \text{ m}$ od osy otáčení?

Dynamika hmotného bodu

Na vlákně délky 2,5 m a pevnosti 90 N je upevněna koule o hmotnosti 3 kg. Při jaké hodnotě obvodové rychlosti se vlákno přetrhne, jestliže koule byla roztočena ve svislé rovině? Jak velká je příslušná úhlová rychlost, doba oběhu a frekvence?

Těleso o hmotnosti $m = 1$ kg je zavěšené na vlákně délky $l = 30$ cm, jehož druhý konec je upevněný. Těleso se pohybuje tak, že konstantní rychlostí v opisuje kružnici ve vodorovné rovině, přičemž vlákno svírá se svislým směrem úhel $\alpha = 60^\circ$. Vypočítejte rychlost v , periodu oběhu T a sílu, která napíná vlákno.

Jaké musí být zvýšení h vnější kolejnice v zatáčce o poloměru $r = 300$ m, aby při průměrné rychlosti vlaku $v = 50$ km.h⁻¹ nevznikl postranní tlak kol na kolejnici? Rozchod kolejnic je $d = 1,435$ m.

Zdvíž o hmotnosti $m_1 = 3\ 600$ kg se pohybuje vzhůru s konstantním zrychlením $a = 1,2$ m.s⁻². Určete:

- Jak velká je síla F , napínající lano, je-li zdviž prázdná?
- Jakou silou F_2 působí podlaha zdviže na tělo cestujícího, jehož hmotnost je $m_2 = 70$ kg?
- Jakou silou působí tento člověk na zdviž?

Na těleso o hmotnosti 1 kg, jehož počáteční rychlost je $\vec{v}_0 = 3$ m.s⁻¹ \vec{i} - 2 m.s⁻¹ \vec{j} + 6 m.s⁻¹ \vec{k} působí síla $\vec{F} = (5$ N - 2 N.s⁻¹ t) \vec{i} + 1 N \vec{j} - 1/3 N.s⁻¹ t \vec{k} . Jaká bude kinetická energie tělesa v čase 6 s?

Určete maximální rychlost, kterou dosáhne uvolněné těleso kulového tvaru poloměru $r = 8$ cm a hmotnosti $m = 10$ kg při volném pádu, jestliže předpokládáme, že pro odpor vzduchu, působící proti pohybu tělesa, platí vztah $F_o = kSv^2$. Zde je v rychlost tělesa, S je plošný obsah průmětu tělesa do roviny kolmé ke směru pohybu, k je číselný součinitel závislý též na tvaru tělesa, který má pro kouli hodnotu $k = 0,235$ kg.m⁻³

Síla působící na volné těleso o hmotnosti 14,6 kg roste s časem podle vztahu $F = 10$ N + 2 N.s⁻¹ t a její směr se nemění.

- Jaký impulz udělí síla tělesu v časovém intervalu 0 až 2 s?
- Jak dlouho musí síla působit, aby její impulz byl roven 119 N.s?
- Jaká bude potom rychlost tohoto tělesa, byla-li jeho počáteční rychlost 3 m.s⁻¹?

Těleso o hmotnosti 0,2 kg dopadne na stěnu rychlostí 5 m.s⁻¹ pod úhlem 60° (měřeném od kolmice v místě dopadu) a pružně se odrazí. Určete střední hodnotu síly, kterou působí při nárazu stěna na těleso. Předpokládejte, že úhel odrazu tělesa se rovná úhlu dopadu, velikost rychlosti po odrazu se zachovává a náraz trvá dobu 0,05 s.

Určete práci síly \vec{F} , která způsobuje pohyb hmotného bodu o hmotnosti $m = 0,2$ kg po kružnici o poloměru $r = 2$ m, je-li úhlové zrychlení pohybu $\epsilon = 2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$. Práci počítejte pro jeden oběh hmotného bodu po dané kružnici.

Těleso o hmotnosti m bylo vrženo vzhůru rychlostí v_0 ve směru spádové přímky drsné nakloněné roviny s úhlem sklonu α . Kinetický součinitel vlečného tření mezi rovinou a tělesem je μ . Do jaké výše h vystoupí těleso? Najděte rychlost v , se kterou se těleso vrátí do místa, ze kterého bylo vrženo, za předpokladu, že úhel α je tak velký, že se těleso může pohybovat vlivem tíhové síly nazpět?

Těleso o hmotnosti 51 kg se pohybuje vlivem síly o velikosti 500 N proti směru největšího spádu na nakloněné rovině s úhlem sklonu 37° . Těleso bylo na počátku působení této síly v klidu. Součinitel kinetického vlečného tření je 0,2. Určete práci této síly při posunutí tělesa o délku 6 m, přírůstek kinetické a potenciální energie a práci spotřebovanou silou tření.

Po nakloněné rovině posouváme rovnoměrně proti směru největšího spádu těleso o hmotnosti 100 kg. Nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel 20° , součinitel kinetického vlečného tření je $\mu = 0,3$.

- Jakou silou musíme při posouvání tělesa působit?
- Jakou práci musíme vykonat při posunutí tělesa o 10 m?
- Při jakém sklonu roviny se bude nezajištěné těleso pohybovat nazpět rovnoměrným pohybem?

Těleso se pohybuje vzhůru po drsné nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel 32° . V počátečním okamžiku má těleso rychlost 60 km/h a součinitel kinetického vlečného tření je 0,24. Určete:

- dobu, za kterou se těleso na nakloněné rovině zastaví,
- dráhu, kterou na nakloněné rovině (do zastavení) proběhne,
- zda v konečném bodě své dráhy zůstane v klidu či začne klouzat zpět.

Motor automobilu o hmotnosti 1400 kg potřebuje dodávat výkon 12 kW, aby se vůz pohyboval po vodorovné silnici rychlostí $50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Vypočítejte:

- Výslednici všech třecích a odporových sil.
- Jaký výkon musí motor téhož vozu dodávat, aby vůz jel uvedenou rychlostí do kopce se stoupáním 10%?
- Jaký výkon potřebuje při jízdě z kopce s klesáním 2% uvedenou rychlostí?
- Jaké klesání by musel mít kopec, aby jel vůz uvedenou rychlostí z kopce i se zastaveným motorem?

Jakou práci musíme vykonat při protažení pružiny o tuhosti k , kde $k = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ o délku $x_0 = 10 \text{ cm}$?

Střela letící rychlostí $v_0 = 400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ narazí na dřevěný kvádr a vnikne do něj do hloubky $h = 0,30$ m. Kdyby byla stejná střela vypálena na kvádr ze stejného dřeva tloušťky $h' = 0,15$ m, jakou rychlostí v by z kvádru vylétla? Předpokládejte, že odporová síla působící proti pohybu střely ve dřevě je konstantní.

Dynamika tuhého tělesa

1. Určete polohu těžiště soustavy složené ze čtyř malých kuliček o hmotnostech 10 g, 20 g, 40 g a 80 g, které leží na přímce v uvedeném pořadí ve vzájemné vzdálenosti 5 cm. [11,33 cm od první kuličky]
2. Určete souřadnice těžiště soustavy čtyř hmotných bodů o hmotnostech 5 g, 10 g, 15g, 20 g, jsou-li umístěny v rovině xy v daném pořadí v bodech [2; 6] m, [6; 4] m, [4; 0] m, [-2; -2] m. [1,8 m; 0,6 m]
3. Určete polohu těžiště homogenní desky o zanedbatelné tloušťce d , která má tvar poloviny kruhu o poloměru R . [Ve vzdálenosti $4R/3\pi$ od středu kruhu na kolmici k přímé hraně.]
4. Do jaké výšky se vychýlí z rovnovážné polohy balistické kyvadlo o hmotnosti 10 kg, jestliže v něm uvízne střela o hmotnosti 100 g letící rychlostí $200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$? [0,2 m]
5. Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní tenké tyče délky l a hmotnosti m vzhledem k ose kolmé na směr tyče a procházející a) středem tyče, b) koncovým bodem tyče. [$1/12 m\cdot l^2$; $1/3 m\cdot l^2$]
6. Brusný kotouč o poloměru 18 cm a tloušťce 3 cm je zhotoven z materiálu o hustotě $3,8 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Vypočítejte jeho moment setrvačnosti a) k ose rotace, b) k ose splývající s některou povrchovou přímkou. [0,188 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$; 0,564 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$]
7. Vypočítejte celkovou kinetickou energii válce o hmotnosti 100 kg, který se valí po vodorovné rovině rychlostí $0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$? [8,75 J]
8. Po nakloněné rovině délky 75 m a úhlu sklonu 32° se účinkem tíhové síly valí (bez klouzání) homogenní válec průměru 68 cm, délky 120 cm a hustoty $2400 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Určete rychlost válce na konci nakloněné roviny, byla-li počáteční rychlost nulová. [22,8 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$]
9. Homogenní těleso tvaru válce o poloměru 8 cm a o hmotnosti 1,5 kg se otáčí kolem své osy s konstantním úhlovým zrychlením $0,125 \text{ s}^{-2}$. Určete kinetickou energii v čase 5 s, bylo-li těleso na počátku otáčení v klidu. [9,38.10⁻⁴ J]
10. Na homogenní válec o poloměru 0,4 m a o hmotnosti 200 kg působí silový moment 10 N.m. Jak dlouho bude trvat, než válec získá takovou úhlovou rychlost, aby konal 4 otáčky za sekundu? [40,21 s]

Gravitační pole

Příklady pro obor G

Vypočítejte hmotnost Slunce, předpokládáte-li, že Země kolem něj oběhne za 1 rok po kruhové dráze o poloměru 149,5 milionů km.

Vypočítejte gravitační konstantu z těchto údajů: Střední hustota Země $\rho_Z = 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, poloměr Země $R_Z = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$, tíhové zrychlení na povrchu Země $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Jak daleko od Slunce obíhá planeta Mars, víme-li, že doba oběhu činí 1,9 pozemského roku a střední vzdálenost Země od Slunce je $149,5 \cdot 10^6 \text{ km}$?

Stacionární umělá družice Země je těleso, které lze pozorovat stále na stejném místě oblohy vzhledem k pozorovateli. Za předpokladu, že družice obíhá v rovině rovníku, vypočítejte:

- Výšku stacionární družice nad povrchem Země.
- Její úhlovou rychlost vzhledem ke středu Země.
- Její oběžnou rychlost.
- V jaké největší výšce nad obzorem lze stacionární družici pozorovat nad naším územím?

Vypočítejte poměr postupných rychlostí Země a Venuše při jejich oběhu kolem Slunce, předpokládáte-li, že obě planety obíhají po kruhových drahách o poloměrech $1,495 \cdot 10^8 \text{ km}$ a $1,08 \cdot 10^8 \text{ km}$. Vypočítejte poměr jejich oběžných dob.

Vypočítejte:

- Oběžnou rychlost družice Měsíce, která by se pohybovala kolem Měsíce po kruhové dráze 113 km nad jeho povrchem.
- Úhlovou rychlost této družice vzhledem ke středu Měsíce.
- Oběžnou dobu družice kolem Měsíce.

Vzdálenost středů Země a Měsíce je 384 700 km. Vypočítejte:

- vzájemnou přitažlivou sílu působící mezi Zemí a Měsícem,
- polohu bodu X (ležícího na spojnici jejich středů), ve kterém jsou jejich přitažlivé síly stejné,
- jakou práci je potřeba vynaložit na přemístění tělesa o hmotnosti 560 kg s povrchu Země do bodu X. Výsledek porovnejte s prací potřebnou k přemístění téhož tělesa do bodu X s povrchu Měsíce.

Vypočítejte kinetickou energii tělesa o hmotnosti m , které dopadlo na Zemi z velké výšky H . Poloměr Země je R . Jak velká by byla kinetická energie pro výšku $H \ll R$?

Jakou práci musí vykonat raketové motory, aby uvedly kosmickou loď o hmotnosti $1,47 \cdot 10^4 \text{ kg}$ na kruhovou oběžnou dráhu ve výšce 270 km nad povrchem Země?

Vypočítejte nejmenší vzdálenost mezi Zemí a Jupiterem, jehož doba oběhu kolem Slunce je 11 roků a 315 dní (pozemských). Země je vzdálena od Slunce 149,5 milionů kilometrů. Předpokládejte, že se planety pohybují po kruhové dráze.

Mechanické kmity

Těleso kmitá harmonickým netlumeným pohybem s amplitudou $u_0 = 0,12\text{m}$, a frekvencí 4Hz . Vypočítejte : a) maximální hodnoty rychlostí a zrychlení. b) rychlost a zrychlení při výchylce $0,06\text{m}$ c) čas potřebný k tomu, aby se těleso dostalo z rovnovážné polohy do výchylky $u = 0,06\text{m}$.

Na pružinu o tuhosti 160 N/m je zavěšeno těleso o hmotnosti 250 g . Potom silou 20 N vychýleno z rovnovážné polohy a v čase $t = 0$ puštěno. Určete:

- amplitudu výchylky,
- poddajnost pružiny,
- frekvenci a kruhovou frekvenci kmitů
- periodu kmitů,
- maximální rychlost a maximální zrychlení tělesa.

Těleso zavěšené na pružině vykonává harmonické kmity. Vypočtete:

- jaká část z celkové energie E oscilátoru připadne na potenciální energii elastickou a kinetickou energii v okamžiku, kdy je výchylka tělesa rovna polovině amplitudy výchylky u_m ,
- určete výchylku tělesa, při níž kinetická a potenciální energie elastická nabývají stejné hodnoty.

Těleso zavěšené na pružině bylo vychýleno o 5 cm z rovnovážné polohy a uvolněno, takže začalo kmitat. Za dobu 12 s vykonalo osm kmitů, během nichž poklesla amplituda na 5 mm . Určete součinitel tlumení, logaritmický dekrement tlumení a amplitudu po devátém kmitu.

Určete amplitudu výchylky, počáteční fázi a okamžitou výchylku harmonického pohybu, který vznikne složením dvou stejnosměrných pohybů s okamžitými výchylkami

$$u_1 = 0,02\text{ m} \sin(5\pi s^{-1}t + \frac{\pi}{2}) \text{ a } u_2 = 0,03\text{ m} \sin(5\pi s^{-1}t + \frac{\pi}{4}).$$

Hmotný bod koná vynucené harmonické kmity. Určete rezonanční úhlovou frekvenci a rezonanční amplitudu výchylky hmotného bodu, je-li jeho hmotnost $0,1\text{ kg}$, úhlová frekvence vlastních kmitů 20 s^{-1} , součinitel tlumení 3 s^{-1} a amplituda budící síly 1 N . [$19,54\text{ s}^{-1}$; $8,43\text{ cm}$].

Hmotný bod koná současně dva navzájem kolmé kmitavé pohyby, vyjádřené rovnicemi

$$u_x = u_{mx} \sin \omega t,$$

$$u_y = u_{my} \cos \omega t,$$

kde $u_{mx} = 2\text{ cm}$, $u_{my} = 1\text{ cm}$, $\omega = \pi \cdot s^{-1}$. Stanovte:

- Rovnici trajektorie hmotného bodu.
- Velikost rychlosti a zrychlení v čase $0,5\text{ s}$.